

Esame Geometria 3

Docente: Prof. P. Oliverio; Esercitatore: Dr. F. Infusino

24 novembre 2022

Esercizio 1. Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\gamma(t) = (\sqrt{3}t - \sin t, t + \sqrt{3} \sin t, 2 \cos t)$$

- (1) Determinare la curvatura di γ . (3 pt.);
- (2) Determinare la torsione di γ . (3 pt.);

Esercizio 2. Si consideri la superficie S ottenuta ruotando attorno all'asse z la circonferenza, che giace nel piano xz , di centro $C = (3, 0, -1)$ e raggio 2.

- (1) Determinare una parametrizzazione regolare per S . (2 pt.);
- (2) Stabilire la natura dei punti di S . (4 pt.);

Esercizio 3. (1) Determinare la trasformazione lineare fratta f che manda 0 in $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}i$ in ∞ e 1 in $-\frac{8+i}{13}$. (2 pt.);

(2) Stabilire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}^+$ l'immagine della circonferenza $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \frac{5}{3}i| = \lambda\}$ è una retta. (4 pt.);

Esercizio 4. Calcolare il valore dei seguenti integrali:

- (1) $\oint_{\gamma(-5i;2)} \frac{e^{3iz}}{(z+4i)^3} dz + \oint_{\gamma(-8i;1)} \frac{e^{10iz}}{(z-4i)^3} dz$ (1 pt.);
- (2) $\oint_{\gamma(-1; \frac{\sqrt{35}}{2})} z^3 \cos\left(\frac{1}{z+i}\right) dz$ (1 pt.).

Trovare la serie di Laurent centrata in $z = -i$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-4i)} \quad (2\text{pt.});$$

Determinare infine i poli e gli zeri in \mathbb{C} , con rispettive molteplicità, della funzione meromorfa:

$$f(z) := \frac{(z^2 + 9)^4 \sin(z^2)}{z^3(z^2 + 1)^4(z^2 - iz + 6)^2} \quad (2\text{pt.});$$

Esercizio 5. Determinare l'insieme dei punti del piano complesso in cui funzione

$$f(z) = 6\bar{z}^2 - 2\bar{z} - 4i|z|^2$$

risulta essere derivabile in senso complesso. In questi punti è pure analitica? (3 pt.)

Dimostrare che se due polinomi di grado $n \geq 1$ coincidono su $n + 1$ punti, allora essi coincidono su tutto \mathbb{C} . (3 pt.)